Complexiteit

College 3

Docent: Lieuwe Vinkhuijzen

10 februari 2020

Vorige keer

1. Voorbeelden algoritmes: Sommige efficiënt, maar niet allemaal
2. Operaties tellen

Intussen

Website: http://liacs.leidenuniv.nl/~vinkhuijzenlt/complexiteit

- Collegeslides (ook deze)
- Dictaat (met opgaven voor in het werkcollege)

Vandaag

1. Satisfiability en bereikbaarheid
2. Zoeken in een array: Ondergrens door beslissingsboom

Gerichte bereikbaarheid

Input: Een gerichte graaf $G = (V, E)$, twee knopen $s, t \in V$
Output: Is er een pad $s \rightarrowtail t$ in G?

2-CNF Satisfiability

- Een formule ϕ is in *Conjunctive Normal Form* (CNF) als $\phi = \bigwedge_{i=1}^{t} \bigvee_{j=1}^{\ell_i} x_{i,j}$.
  Dus als ϕ een AND van OR's is
- Een component $\bigvee_{j=1}^{\ell_i} x_{i,j}$ noemen we een *clausule*.
- Als alle clausules lengte k hebben, is de formule in k-CNF.
- **Voorbeeld 1:**

$$
\begin{aligned}
\phi(a,b,c,d) = \quad & (\neg a \vee b) && (1)\\
\wedge\, & (\neg b \vee \neg c) && (2)\\
\wedge\, & (c \vee d) && (3)\\
\wedge\, & (\neg d \vee c) && (4)\\
\wedge\, & (b \vee a) && (5)
\end{aligned}
$$

2-CNF Satisfiability

Input: Een formule, ϕ, in 2-CNF
Output: Bestaat er een toekenning aan de variabelen z.d.d.[1] $\phi = \textsc{True}$?
Voorbeeld 1:

$$\begin{aligned}
\phi(a,b,c,d) = \quad & (\neg a \vee b) && (6)\\
\wedge\ & (\neg b \vee \neg c) && (7)\\
\wedge\ & (c \vee d) && (8)\\
\wedge\ & (\neg d \vee c) && (9)\\
\wedge\ & (b \vee a) && (10)
\end{aligned}$$

[1] z.d.d.: "Zodanig dat"

Omschrijven van een clausule

$$(a \vee b) \iff (\neg a \implies b) \tag{11}$$

Maar $a \vee b = b \vee a$, dus we krijgen ook:

$$(a \vee b) \iff (\neg b \implies a) \tag{12}$$

Laten we beide vormen opnemen:

$$(a \vee b) \iff (\neg a \implies b) \wedge (\neg b \implies a) \tag{13}$$

Omschrijven van een clausule

$$(a \lor b) \iff (\neg a \implies b) \tag{11}$$

Maar $a \lor b = b \lor a$, dus we krijgen ook:

$$(a \lor b) \iff (\neg b \implies a) \tag{12}$$

Laten we beide vormen opnemen:

$$(a \lor b) \iff (\neg a \implies b) \land (\neg b \implies a) \tag{13}$$

Ruikt een beetje als een graaf

Omschrijven van clausules

We schrijven alle clausules om.
Voorbeeld 1:

$$\begin{aligned}
\phi(a,b,c,d) = \quad & (\neg a \vee b) && (14)\\
\wedge\ & (\neg b \vee \neg c) && (15)\\
\wedge\ & (c \vee d) && (16)\\
\wedge\ & (\neg d \vee c) && (17)\\
\wedge\ & (b \vee a) && (18)
\end{aligned}$$

Tweede voorbeeld

Voorbeeld 2:

$$
\begin{align}
\psi(a,b,c,d,e) = \; & (\neg a \vee b) \tag{19}\\
& \wedge (\neg b \vee \neg c) \tag{20}\\
& \wedge (\neg b \vee d) \tag{21}\\
& \wedge (c \vee \neg e) \tag{22}\\
& \wedge (\neg d \vee \neg e) \tag{23}\\
& \wedge (e \vee f) \tag{24}
\end{align}
$$

Wel satisfiable: $(a,b,c,d,e,f) = (1,1,0,1,0,1)$

Vermoeden. Een formule ϕ in 2-CNF is satisfiable dan en slechts dan als, voor alle variabelen x, niet zowel x te bereiken is vanuit $\neg x$, en $\neg x$ te bereiken is vanaf x.

Vermoeden. Een formule ϕ in 2-CNF is satisfiable dan en slechts dan als, voor alle variabelen x, niet zowel x te bereiken is vanuit $\neg x$, en $\neg x$ te bereiken is vanaf x.

---

procedure $\textsc{Satisfiability}(\phi)$ $\triangleright$ $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ heeft n variabelen
    $G :=$ Maak de graaf(ϕ)
    for $i = 1 \ldots n$ **do**
        if Bereikbaar$(G, x_i, \neg x_i)$ en Bereikbaar$(G, \neg x_i, x_i)$ **then**
            return False
        end if
    end for
    return True
end procedure

Is het antwoord altijd juist?

Theorem

De formule ψ is satisfiable dan en slechts dan als, voor alle variabelen x, niet zowel x te bereiken is vanuit $\neg x$ en $\neg x$ te bereiken is vanaf x.

Proof.

($\implies$) Als ψ satisfiable is, dan geldt duidelijk dat niet zowel $x \rightarrowtail \neg x$ als $\neg x \rightarrowtail x$. $\square$

Theorem

De formule ψ is satisfiable dan en slechts dan als, voor alle variabelen x, niet zowel x te bereiken is vanuit $\neg x$ en $\neg x$ te bereiken is vanaf x.

Definition (Literal)

Een *literal* is ofwel een variabele, x, of $\neg x$.

Theorem

De formule ψ is satisfiable dan en slechts dan als, voor alle variabelen x, niet zowel x te bereiken is vanuit $\neg x$ en $\neg x$ te bereiken is vanaf x.

Proof.

($\Longleftarrow$) Stel dat voor alle x niet zowel $x \rightarrowtail \neg x$ als $\neg x \rightarrowtail x$. Neem zvda[2] aan dat de graaf verbonden is. We maken een satisfying assignment.

- Als er een pad $x \longrightarrow \neg x$ is, zet $x := \textsc{False}$
- Als er een pad $\neg x \longrightarrow x$ is, zet $x := \textsc{True}$.
- Propageer de implicaties.
- **repeat**
  - Kies een variabele x
  - $x := 0$
  - Propageer de implicaties

  until Alle variabelen hebben een waarde

In dit proces ontstaat geen tegenspraak, dus het eindigt met een goede toekenning.